# МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ

(государственный технический университет)

## Факультет

## прикладной математики и физики

# **КУРСОВАЯ РАБОТА**

**«**Системы массового обслуживания**»**

Выполнил: студент группы 08-504

Никольский Г. Л.

Вариант 9

Преподаватель: Борисов А.В.

### Москва

### 2011

**Постановка задачи**

Пусть цепь Маркова с множеством состояний , где и переходной матрицей

Начальное распределение

(номер студента в группе).

Цепь доступна косвенному наблюдению:

где последовательность независимых стандартных гауссовских величин,

1. С помощью метода производящих функций найти распределение в произвольный момент времени .
2. Выяснить является ли цепь эргодической. Найти все стационарные (т.е. инвариантные) распределения.
3. Рассматривая систему наблюдения (2) на интервале , построить:  
   a) наилучшую нелинейную оценку фильтрации , её ошибку , условную ковариацию , где – -алгебра, порожденная случайными величинами   
   б) наилучшую линейную оценку фильтрации , её ошибку ;  
   в) тривиальную оценку , её ошибку , условную ковариацию и безусловную ковариацию .
4. Путем осреднения по пучку траекторий (1000 реализаций) построить оценки:  
   а) ;  
   б) ;

в) .

1. Результаты представить в виде таблиц и графиков.
2. Пункты 3-5 выполнить для

Проанализировать полученные результаты и сделать выводы.

# **Теоретическая часть**

*Определение 1.* Случайный процесс с дискретным временем, сечение которого является дискретной случайной величиной, называется цепью.

*Определение 2.* - стохастическая последовательность, если для любого натурального n - - измеримая случайная величина.

*Определение 3.* Стохастическая последовательность , принимающая значения из конечного или счетного множества называется марковской цепью (МЦ), если , - борелевское множество:

В простейшем случае условное распределение последующего состояния МЦ зависит только от текущего состояния и не зависит от всех предыдущих состояний.

Будем рассматривать МЦ с дискретным временем с пространством состояний .

*Определение 4.* Матрица , где , называется матрицей переходных вероятностей на -м шаге.

*Определение 5.* Вероятность , , называется вероятностью состояния  в момент времени , а вектор  - распределением вероятностей состоянийМЦ  в момент .

Известно, что при каждом  выполнено рекуррентное соотношение

.

Для МЦ с дискретным временем строится ориентированный граф переходов по следующим правилам:

1. Множество вершин графа совпадает со множеством состояний цепи.
2. Вершины  соединяются ориентированным ребром , если  (то есть интенсивность потока из -го состояния в -е положительна).

*Определение 6.* МЦ называется однородной, если матрица переходных вероятностей не зависит от номера шага, то есть

Для таких цепей при определённых условиях выполняется следующее свойство: .

*Определение 7.* Распределение называется стационарным распределением, если выполняется следующее равенство:

.

*Определение 8.* Марковская цепь называется эргодической, если , причем .

Для выяснения условий эргодичности однородной МЦ необходимо ввести классификацию ее возможных состояний.

Пусть - вероятность перехода за шагов из состояния в состояние , пусть также обозначает вероятность первого возвращения за шагов в состояние .

*Определение 9.* Состояние называется несущественным, если найдется , такое, что для некоторого, но для всех . В противном случае состояние  называется существенным.

*Определение 10.* Состояния  называются сообщающимися, если найдутся , такие, что  и .

*Определение 11.* Состояние  называется возвратным, если и невозвратным, если , где .

*Определение 12.* Пусть — наибольший общий делитель чисел . Состояние  называется периодическим с периодом , если . В противном случае состояние — апериодическое.

*Определение 13.* МЦ называется неразложимой, если все ее состояния – существенные и сообщающиеся. Иначе МЦ называется разложимой.

*Определение 14.* Неразложимая МЦ называется апериодической, если все её состояния — апериодические().

Tеорема 1. Для того чтобы конечная МЦ была эргодической, необходимо и достаточно, чтобы она была неразложимой и апериодической.

Если для МЦ верно, что для любых  существуют независящие от  пределы

 при,

где числа  являются единственным решением системы уравнений:

, ,

,

то цепь называется эргодической, а распределение вероятностей  - стационарным распределением МЦ.

*Определение 15.* Производящая функция  неслучайной последовательности, — это формальный степенной ряд

Производящие функции дают возможность описывать большинство сложных последовательностей довольно просто, а иногда найти для них явные формулы.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  |

*Алгоритм метода производящих функций:*

1. Найти , где  - единичная матрица, соответствующей размерности, - матрица переходных вероятностей, - единичная матрица.

2. Найти обратное - преобразование полученного вектора, т.е. обратное - преобразование каждого элемента вектора для получения аналитического выражения для .

Для однородных цепей при определенных условиях выполняется следующее свойство:  при , а предельное распределение  вероятностей состояний МЦ не зависит от начального распределения .Оно определяется лишь переходной матрицей *.* В этом случае говорят, что ЦМ обладает эргодическим свойством.Вероятности состояний  по мере увеличения  практически перестают изменяться, а система, описываемая соответствующей цепью, переходит в стационарный режимфункционирования.

**Фильтрация марковских цепей.**

- вектор состояний системы (ненаблюдаемый) в момент времени ;

- вектор наблюдений;

- шумы в уравнении состояний;

- шумы в уравнении наблюдений;

– вектор параметров.

Задача фильтрации состоит в определении с.к.-оптимальной оценки процесса понаблюдениям .

С.к. – оптимальной оценкой является условное математическое ожидание:

Если – множество всех функций , то оптимальная оценка . Более того, если , то - оптимальная оценка.

Пусть  - случайная величина, принимающая значения  с вероятностями  соответственно. Пусть наблюдения производятся по схеме , где ,  - детерминированные известные векторы,  - стандартная случайная величина, плотность распределения которой положительна. Найдем  - нелинейную оценку фильтрации. Обозначим  и найдем :



где  - плотность вероятности СВ ,  - единичная ступенчатая функция, непрерывная справа.



,

.

Тогда



*Алгоритм метода оптимальной нелинейной фильтрации:*

1. Начальные условия: .
2. Одношаговый прогноз: .
3. Найти оптимальную оценку состояния МЦ по формуле:



где  - компоненты вектора .

Условная ковариация: .

Для линейной системы наблюдения известно решение с.к.-оптимальной линейной фильтрации. Оно задается с помощью фильтра Калмана.

*Алгоритм метода оптимальной линейной фильтрации:*

1. Начальные условия: , .
2. Наилучший прогноз: ,

ковариация ошибки прогноза: .

1. Найти оценку фильтра Калмана и ковариацию ошибки оценки: , , где  - интенсивность дискретного белого шума.

Для заданной постановки задачи тривиальная оценка: .

Решение

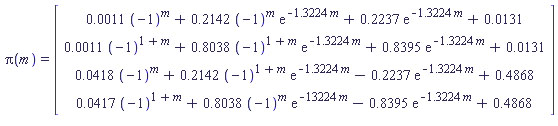
**Задание 1**

С помощью метода производящих функций найти распределение  в произвольный момент времени t.

Переходная матрица : 

Начальное распределение: 

Пользуясь методом производящих функций, найдем аналитическое выражение для .



**Задание 2**

Выяснить, является ли цепь  эргодической. Найти все стационарные распределения (т.е. инвариантные) распределения.

Согласно теореме 1, для выяснения эргодичности цепи, необходимо проверить ее на неразложимость и апериодичность.

Все состояния МЦ являются существенными и сообщающимися. МЦ является неразложимой.

Проверим все состояния на апериодичность. Найдем для первого состояния явный вид множества . Получим .

, первое состояние периодично с периодом 2. Тогда МЦ не является апериодической.

Поэтому по теореме 1 МЦ не является эргодической.

Для нахождения стационарного распределения составим систему:

p2sin2(π/10)+p4sin2(π/20)=p1

p1=p2

p2cos2(π/10)+p4cos2(π/20)=p3

p3=p4

p1+p2+p3+p4=1

Стационарное распределение:

p1=0.0131

p2=0.0131

p3=0.4868

p4=0.4868

**Задание 3**

Оценки состояний МЦ получены с помощью алгоритмов, изложенных в теоретической части. Они представлены на графиках.

Каждому состоянию соответствует отдельный график.

Синим изображена нелинейная оценка, красным – линейная, зеленым – тривиальная. Истинное состояние в данном случае совпадает с нелинейной оценкой.

|  |  |
| --- | --- |
| Оценки первого состояния | Оценки второго состояния |
| Оценки третьего состояния | Оценки четвертого состояния |

Наиболее точные результаты дает нелинейная оценка. Это связано с тем, что компоненты вектора  гораздо больше компонент вектора . На графиках отсутствует индикаторная функция состояния из-за того, что график нелинейной оценки почти совпадает с графиком индикаторной функции состояния.

Для вектора :

Истинное состояние изображено черным, синим изображена нелинейная оценка, красным – линейная, зеленым – тривиальная.

|  |  |
| --- | --- |
| Оценки первого состояния | Оценки второго состояния |
| Оценки третьего состояния | Оценки четвертого состояния |

**Задание 4**

Путем осреднения ковариаций по пучку из 100 реализаций, были получены средние значения ковариаций ошибок для трех типов оценок.

Синим изображены ошибки нелинейной оценки, красным – линейной, зеленым – тривиальной.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

**Выводы**

В результате выполнения работы были изучены цепи Маркова. Найдено распределение Марковской цепи в произвольный момент времени при помощи z-преобразования.

При нахождении  была выявлена закономерность: компоненты  при различных n будут чередоваться (при чётных и нечётных). Это будет происходить вследствие периодичности МЦ.

В цепи присутствуют два циклических подкласса  и , поэтому первые и последние компоненты одинаковы.

По построенным графикам можно наблюдать, что наиболее точные результаты дает нелинейная оценка. Линейная оказывается менее точной. Но к плюсам линейной оценки стоит отнести простоту ее построения, в отличие от сложно считаемой нелинейной оценки.

При малых  наилучшей оценкой является нелинейная, наихудшей – тривиальная. При увеличении  результат становится менее точным из-за того, что шум преобладает над полезным сигналом.